УДК 539.12

СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, К.В. Казмерчук

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

SCALAR PARTICLE WITH INTRINSIC STRUCTURE IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN CURVED SPACE-TIME

E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, K.V. Kazmerchuk

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

Релятивистская теория Кокса для скалярной неточечной частицы с внутренней структурой развита в присутствии внешних электромагнитных и гравитационных полей, последние описываются с помощью псевдоримановой структуры пространства-времени. Показано, что обобщенная типа Прока система тензорных уравнений содержит члены неминимального взаимодействия через тензор электромагнитного поля $F_{\beta\alpha}$ и тензор Риччи $R_{\beta\alpha}$. Обобщенное скалярное уравнение типа Клейна – Фока – Гордона оказывается существенно сложнее обычного волнового уравнения.

***Ключевые слова**: спин 0, внутренняя структура, частица Кокса, обобщенное волновое уравнение, риманово пространство.*

Relativistic theory of the Cox's scalar not point-like particle with intrinsic structure is developed in the presence of external electromagnetic and gravitational fields; the latter is described by pseudo-Riemannian space-time geometry. It is shown that the generalized Proca-like tensor system of equations of the first order contains non minimal interaction terms through electromagnetic tensor $F_{\beta\alpha}$ and Ricci tensor $R_{\beta\alpha}$. Generalized scalar equation of the Klein – Fock – Gordon type turns out to be much more complicated than the ordinary wave equation.

***Keywords**: spin zero, intrinsic structure, Cox's particle, generalized wave equation, Riemannian space.*

Введение

В 1982 г. Кокс построил обобщенную систему уравнений первого порядка, которая, как оказалось [1], описывает скалярную частицу с внутренней структурой, проявляющейся во внешних электромагнитных полях. Он исходил из идеи построения нового волнового уравнения для скалярной частицы при использовании большего набора тензорных функций, чем в подходе Прока. Кокс использовал набор из скаляра, 4-вектора, антисимметричного и (неприводимого) симметричного тензоров, таким образом, исходил из 20-компонентной волновой функции. Исследуем эту систему уравнений при наличии внешних гравитационных полей, описываемых в рамках искривленной пространственно-временной геометрии [2].

1 Система уравнений Кокса с учетом неевклидовой геометрии

Будем исходить из полной системы уравнений Кокса [3] для частицы со спином 0, включающей дополнительные симметричный и антисимметричный тензоры:

$$\lambda_1 D^{\beta}\Phi_{\beta} - \mu\Phi = 0,$$

$$\lambda_1^* D_{\beta}\Phi + \lambda_2 D^{\alpha}\Phi_{[\alpha\beta]} - \lambda_3 D^{\alpha}\Phi_{(\alpha\beta)} - \mu\Phi_{\beta} = 0,$$

$$\lambda_2^*(D_{\alpha}\Phi_{\beta} - D_{\beta}\Phi_{\alpha}) - \mu\Phi_{[\alpha\beta]} = 0, \tag{1.1}$$

$$\lambda_3^*\left(D_{\alpha}\Phi_{\beta} + D_{\beta}\Phi_{\alpha} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}D^{\rho}\Phi_{\rho}\right) - \mu\Phi_{(\alpha\beta)} = 0,$$

где вспомогательные числовые параметры λ_1, λ_2, λ_3 подчиняются условиям связи:

$$\lambda_2\lambda_2^* - \lambda_3\lambda_3^* = 0,$$

$$\lambda_1\lambda_1^* - \frac{3}{2}\lambda_3\lambda_3^* = 1; \tag{1.2}$$

символ D_{α} обозначает производную, учитывающую присутствие внешних электромагнитного и гравитационного полей

$$D = i\hbar\nabla_{\alpha} - i\frac{e}{c}A_{\alpha}, \quad \mu = Mc.$$

С помощью третьего и четвертого уравнений в (1.1) исключим тензорные компоненты

$$\mu^{-1}\left(\lambda_2^*(D_{\alpha}\Phi_{\beta} - D_{\beta}\Phi_{\alpha})\right) = \Phi_{[\alpha\beta]},$$

$$\mu^{-1}\left(\lambda_3^*\left(D_{\alpha}\Phi_{\beta} + D_{\beta}\Phi_{\alpha} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}D^{\rho}\Phi_{\rho}\right)\right) = \Phi_{(\alpha\beta)}$$

из оставшихся двух:

$$\lambda_1 D^{\beta}\Phi_{\beta} - \mu\Phi = 0, \tag{1.3}$$

$$\lambda_1^* D_{\beta}\Phi + \lambda_2 D^{\alpha}\mu^{-1}\left[\lambda_2^*(D_{\alpha}\Phi_{\beta} - D_{\beta}\Phi_{\alpha})\right] -$$

$$-\lambda_3 D^{\alpha}\mu^{-1}\left(\lambda_3^*\left(D_{\alpha}\Phi_{\beta}+D_{\beta}\Phi_{\alpha}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}D^{\rho}\Phi_{\rho}\right)\right)-$$

$$-\mu\Phi_{\beta}=0. \qquad (1.4)$$

Выполним преобразования в (1.4):

$$\lambda_1^* D_{\beta}\Phi+\mu^{-1}\lambda_2\lambda_2^*\ (\underline{D^{\alpha}D_{\alpha}\Phi_{\beta}}-D^{\alpha}D_{\beta}\Phi_{\alpha})-$$

$$-\mu^{-1}\lambda_3\lambda_3^*\left(\underline{D^{\alpha}D_{\alpha}\Phi_{\beta}}+D^{\alpha}D_{\beta}\Phi_{\alpha}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}D^{\alpha}D^{\rho}\Phi_{\rho}\right)-$$

$$-\mu\Phi_{\beta}=0;$$

подчеркнутые члены с учетом (1.2) сокращаются:

$$\lambda_1^* D_{\beta}\Phi-\mu^{-1}(\lambda_2\lambda_2^*+\lambda_3\lambda_3^*)\ D^{\alpha}D_{\beta}\Phi_{\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2}\mu^{-1}\lambda_3\lambda_3^* D_{\beta}D^{\rho}\Phi_{\rho}-\mu\Phi_{\beta}=0. \qquad (1.5)$$

С учетом (1.2) возможна замена

$$(\lambda_2\lambda_2^*+\lambda_3\lambda_3^*)=2\lambda_3\lambda_3^*$$

и, следовательно,

$$\lambda_1^* D_{\beta}\Phi-\mu^{-1}2\lambda_3\lambda_3^*\ D_{\alpha}D_{\beta}\Phi^{\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2}\mu^{-1}\lambda_3\lambda_3^* D_{\beta}D_{\alpha}\Phi^{\alpha}-\mu\Phi_{\beta}=0.$$

Воспользуемся тождеством

$$D_{\alpha}D_{\beta}\Phi^{\alpha}=D_{\beta}D_{\alpha}\Phi^{\alpha}+(D_{\alpha}D_{\beta}-D_{\beta}D_{\alpha})\Phi^{\alpha}=$$

$$=D_{\beta}D_{\alpha}\Phi^{\alpha}+\hbar^2\left(-i\frac{e}{\hbar c}F_{\alpha\beta}-R_{\alpha\beta}\right)\Phi^{\alpha\alpha}\ .$$

Уравнение (1.5) можно преобразовать в виду:

$$\lambda_1^* D_{\beta}\Phi+\mu^{-1}2\lambda_3\lambda_3^*\ \hbar^2\left(i\frac{e}{c}F_{\alpha\beta}+R_{\alpha\beta}\right)\Phi^{\alpha}-$$

$$-\frac{3}{2}\mu^{-1}\lambda_3\lambda_3^* D_{\beta}(D_{\alpha}\Phi^{\alpha})-\mu\Phi_{\beta}=0.$$

Учитывая уравнение (1.3) получим

$$D_{\alpha}\Phi^{\alpha}=\frac{\mu}{\lambda_1}\Phi;$$

$$\lambda_1\lambda_1^* D_{\beta}\Phi+\mu^{-1}2\lambda_3\lambda_3^*\ \hbar^2\left(i\frac{e}{\hbar c}F_{\alpha\beta}+R_{\alpha\beta}\right)\lambda_1\Phi^{\alpha}-$$

$$-\frac{3}{2}\lambda_3\lambda_3^* D_{\beta}\Phi-\mu\lambda_1\Phi_{\beta}=0. \qquad (1.6)$$

Используя второе условие в (1.2)

$$\lambda_1\lambda_1^*-\frac{3}{2}\lambda_3\lambda_3^*=1,$$

уравнение (1.6) упрощаем к виду:

$$D_{\beta}\Phi+\mu^{-1}2\lambda_3\lambda_3^*\ \hbar^2\left(i\frac{e}{\hbar c}F_{\alpha\beta}+R_{\alpha\beta}\right)\lambda_1\Phi^{\alpha}-$$

$$-\mu\lambda_1\Phi_{\beta}=0.$$

Учитывая уравнение (1.3), получим

$$\lambda_1 D^{\beta}\Phi_{\beta}-\mu\Phi=0.$$

Параметр λ_1 можно внести в обозначение векторной компоненты

$$\lambda_1\Phi_1\rightarrow\Phi_1.$$

Таким образом, получаем уравнения:

$$D^{\beta}\Phi_{\beta}-\mu\Phi=0\ ,$$

$$D_{\beta}\Phi-i\frac{\hbar^2}{Mc}(2\lambda_3\lambda_3^*)\left(\frac{e}{\hbar c}F_{\beta\alpha}+iR_{\beta\alpha}\right)\Phi^{\alpha}-$$

$$-\mu\Phi_{\beta}=0. \qquad (1.7)$$

Система (1.7) учитывает неминимальное взаимодействие скалярной частицы Кокса с внешним геометрическим фоном через тензор Риччи.

Далее будем использовать параметр:

$$\lambda=\frac{\hbar^2}{Mc}\frac{e}{\hbar c}(2i\lambda_3\lambda_3^*).$$

Уравнения (1.7) можно переписать в виде:

$$D^{\beta}\Phi_{\beta}-\mu\Phi=0,$$

$$D_{\beta}\Phi-\lambda\left(F_{\beta\alpha}+i\frac{\hbar c}{e}R_{\beta\alpha}\right)\Phi^{\alpha}-\mu\Phi_{\beta}=0. \qquad (1.8)$$

В отсутствие электромагнитного поля уравнения (1.8) упрощаются (напоминаем, что $i\lambda$ – вещественный параметр)

$$D^{\beta}\Phi_{\beta}=\mu\Phi,$$

$$D_{\beta}\Phi=\left(i\lambda\frac{\hbar c}{e}R_{\beta\alpha}(x)+\mu g_{\beta\alpha}(x)\right)\Phi^{\alpha}.$$

Это геометрическая модификация теории скалярной частицы в подходе Кокса.

2 Обобщенное уравнение Клейна – Фока – Гордона

Представим уравнения (1.8) в виде (напоминаем, что $\lambda^*=-\lambda$; временно коэффициент $\hbar c/e$ внесем в обозначение тензора Риччи):

$$D^{\beta}\Phi_{\beta}=\mu\Phi,$$

$$[\mu\delta_{\alpha}^{\beta}+\lambda(F_{\alpha}^{\beta}+iR_{\alpha}^{\beta})]\Phi_{\beta}=D_{\alpha}\Phi. \qquad (2.1)$$

С использованием обозначения

$$\Lambda_{\alpha}^{\beta}=\mu\delta_{\alpha}^{\beta}+\lambda(F_{\alpha}^{\beta}+iR_{\alpha}^{\beta}),$$

уравнения (2.1) можно записать следующим образом:

$$\Phi_{\rho}=(\Lambda^{-1})_{\rho}^{\alpha}D_{\alpha}\Phi,$$

$$D^{\rho}\Phi_{\rho}=\mu\Phi,$$

и дальше следует обобщенное скалярное уравнение типа Клейна – Фока – Гордона

$$\left(D^{\rho}(\Lambda^{-1})_{\rho}^{\alpha}(x)D_{\alpha}-\mu\right)\Phi(x)=0.$$

Поскольку характеристическое уравнение [4] для матрицы

$$F_{\alpha}^{\beta}+iR_{\alpha}^{\beta}=G_{\alpha}^{\beta},$$

$$G^4=g_0+g_1G+g_2G^2+g_3G^3$$

позволяет выразить четвертую степень матрицы $G_{\alpha}{}^{\beta}$ через G^0,G^1,G^2,G^3, то можно искать обратную матрицу в виде:

$$(\Lambda^{-1})_{\rho}^{\alpha}=\lambda_0+\lambda_1 G+\lambda_2 G^2+\lambda_3 G^3.$$

Из уравнения $\Lambda\Lambda^{-1}=I$:

$$I=(\mu+\lambda G)(\lambda_0+\lambda_1 G+\lambda_2 G^2+\lambda_3 G^3)=$$

$$=\mu\lambda_0+\mu\lambda_1 G+\mu\lambda_2 G^2+\mu\lambda_3 G^3+$$

$$+\lambda\lambda_0 G + \lambda\lambda_1 G^2 + \lambda\lambda_2 G^3 +$$
$$+\lambda\lambda_3 (g_0 + g_1 G + g_2 G^2 + g_3 G^3)$$
получаем линейную систему уравнений:
$$G^0: \quad \mu\lambda_0 + \lambda\lambda_3 g_0 = 1,$$
$$G: \quad \mu\lambda_1 + \lambda\lambda_0 + \lambda\lambda_3 g_1 = 0,$$
$$G^2: \quad \mu\lambda_2 + \lambda\lambda_1 + \lambda\lambda_3 g_2 = 0,$$
$$G^3: \quad \mu\lambda_3 + \lambda\lambda_2 + \lambda\lambda_3 g_3 = 0.$$
Представим систему в матричной форме
$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \lambda g_0 \\ \lambda & \mu & 0 & \lambda g_1 \\ 0 & \lambda & \mu & \lambda g_2 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu + \lambda g_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \dots \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$
Эта система имеет следующее решение:
$$\lambda_0 = -\frac{\mu^3 + \mu^2\lambda g_3 - \mu\lambda^2 g_2 + \lambda^3 g_1}{-\mu^4 - \mu^3\lambda g_3 + \mu^2\lambda^2 g_2 - \mu\lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0},$$
$$\lambda_1 = -\frac{-\mu^2\lambda - \mu\lambda^2 g_3 + \lambda^3 g_2}{-\mu^4 - \mu^3\lambda g_3 + \mu^2\lambda^2 g_2 - \mu\lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0},$$
$$\lambda_2 = -\frac{\mu\lambda^2 + \lambda^3 g_3}{-\mu^4 - \mu^3\lambda g_3 + \mu^2\lambda^2 g_2 - \mu\lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0},$$
$$\lambda_3 = -\frac{-\lambda^3}{-\mu^4 - \mu^3\lambda g_3 + \mu^2\lambda^2 g_2 - \mu\lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0}.$$
Для дальнейшего введем обозначения:
$$g_0 = p_4, \quad g_1 = p_3, \quad g_2 = p_2, \quad g_3 = p_1,$$
$$G^4 = +p_1 G^3 + p_2 G^2 + p_3 G + p_4,$$
тогда
$$\lambda_0 = \frac{\mu^3 + \mu^2\lambda p_1 - \mu\lambda^2 p_2 + \lambda^3 p_3}{\mu^4 + \mu^3\lambda p_1 - \mu^2\lambda^2 p_2 + \mu\lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4},$$
$$\lambda_1 = \frac{-\mu^2\lambda - \mu\lambda^2 p_1 + \lambda^3 p_2}{\mu^4 + \mu^3\lambda p_1 - \mu^2\lambda^2 p_2 + \mu\lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4},$$
$$\lambda_2 = \frac{\mu\lambda^2 + \lambda^3 p_1}{\mu^4 + \mu^3\lambda p_1 - \mu^2\lambda^2 p_2 + \mu\lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4},$$
$$\lambda_3 = \frac{-\lambda^3}{\mu^4 + \mu^3\lambda p_1 - \mu^2\lambda^2 p_2 + \mu\lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4}. \quad (2.2)$$
Степеням матрицы G можно сопоставить следующие инварианты [4]:
$$\mathrm{Sp}(G) = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = s_1,$$
$$s_1 = G^{\alpha}_{\alpha}(x),$$
$$\mathrm{Sp}(G^2) = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 = s_2,$$
$$s_2 = G^{\rho}_{\alpha}(x) G^{\alpha}_{\rho}(x),$$
$$\mathrm{Sp}(G^3) = g_1^3 + g_2^3 + g_3^3 + g_4^3 = s_3,$$
$$s_3 = G^{\rho}_{\alpha}(x) G^{\sigma}_{\rho}(x) G^{\alpha}_{\sigma}(x),$$
$$\mathrm{Sp}(G^4) = g_1^4 + g_2^4 + g_3^4 + g_4^4 = s_4,$$
$$s_4 = G^{\rho}_{\alpha}(x) G^{\delta}_{\rho}(x) G^{\sigma}_{\delta}(x) G^{\alpha}_{\sigma}(x);$$
$g_1, \dots, g_4$ обозначают собственные значения матрицы G.

Инварианты s_i и p_i связаны рекуррентными формулами Ньютона [4]:
$$p_1 = s_1 = \mathrm{Sp}(G),$$
$$p_2 = \frac{1}{2}(s_2 - p_1 s_1) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sp}(G^2) - p_1 \mathrm{Sp}(G)\right],$$
$$p_3 = \frac{1}{3}(s_3 - p_1 s_2 - p_2 s_1) =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\mathrm{Sp}(G^3) - p_1 \mathrm{Sp}(G^2) - p_2 \mathrm{Sp}(G)\right],$$
$$p_4 = \frac{1}{4}(s_4 - p_1 s_3 - p_2 s_2 - p_3 s_1) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\mathrm{Sp}(G^4) - p_1 \mathrm{Sp}(G^3) - p_2 \mathrm{Sp}(G^2) - p_3 \mathrm{Sp}(G)\right].$$
Отсюда следуют следующие представления для инвариантов p_i:
$$p_1 = \mathrm{Sp}(G),$$
$$p_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(G^2) - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}^2(G),$$
$$p_3 = \frac{1}{3}\Big[\mathrm{Sp}(G^3) - \mathrm{Sp}(G)\mathrm{Sp}(G^2) -$$
$$- \frac{1}{2}\big(\mathrm{Sp}(G^2) - \mathrm{Sp}^2(G)\big)\mathrm{Sp}(G)\Big] =$$
$$= \frac{1}{3}\mathrm{Sp}(G^3) - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(G^2)\mathrm{Sp}(G) + \frac{1}{6}\mathrm{Sp}^3(G),$$
$$p_4 = \frac{1}{4}\Big[\mathrm{Sp}(G^4) - \mathrm{Sp}(G)\mathrm{Sp}(G^3) -$$
$$- \frac{1}{2}\big(\mathrm{Sp}(G^2) - \mathrm{Sp}^2(G)\big)\mathrm{Sp}(G^2) - p_3 \mathrm{Sp}(G)\Big] =$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{Sp}(G^4) - \mathrm{Sp}(G)\mathrm{Sp}(G^3) -$$
$$- \frac{1}{2}\mathrm{Sp}^2(G^2) + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}^2(G)\mathrm{Sp}(G^2) - \frac{1}{3}\mathrm{Sp}(G^3)\mathrm{Sp}(G) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(G^2)\mathrm{Sp}^2(G) - \frac{1}{6}\mathrm{Sp}^3(G)\mathrm{Sp}(G)\Big],$$
окончательно для p_4 находим выражение:
$$p_4 = \frac{1}{4}\Big[\mathrm{Sp}(G^4) - \frac{4}{3}\mathrm{Sp}(G)\mathrm{Sp}(G^3) - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}^2(G^2) +$$
$$+ \mathrm{Sp}^2(G)\mathrm{Sp}(G^2) - \frac{1}{6}\mathrm{Sp}^4(G)\Big].$$
В случае, если матрица G антисимметрична, выполняются равенства
$$\tilde{G} = -G, \quad p_1 = \mathrm{Sp}G = 0,$$
$$G^3 = -G^3, \quad \mathrm{Sp}(G^3) = 0,$$
$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(G^2),$$
$$p_3 = 0, \quad p_4 = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}(G^4) + \frac{1}{8}\mathrm{Sp}^2(G^2)$$
и характеристическое уравнение принимает вид:
$$G^4 - p_2 G^2 - p_4 = 0;$$

именно этот случай реализуется при построении характеристического многочлена для электромагнитного тензора. При этом формулы (2.2) принимают вид:

$$\lambda_0 = \frac{\mu^3 - \mu\lambda^2 p_2}{\mu^4 - \mu^2\lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4},$$

$$\lambda_1 = \frac{-\mu^2\lambda + \lambda^3 p_2}{\mu^4 - \mu^2\lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4},$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu\lambda^2}{\mu^4 - \mu^2\lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4},$$

$$\lambda_3 = \frac{-\lambda^3}{\mu^4 - \mu^2\lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}.$$

Для дополнительной проверки рассмотрим простой случай: когда пространство-время описывается тензором Риччи вида (элементарными примерами являются пространства де Ситтера):

$$G_{\alpha\beta} = \frac{R}{4} g_{\alpha\beta}, \quad G_\alpha^\beta = \frac{R}{4}\delta_\alpha^\beta,$$

$$\mathrm{Sp}G = R, \quad \mathrm{Sp}(G^2) = \frac{1}{4}R^2,$$

$$\mathrm{Sp}(G^3) = \frac{1}{4^2}R^3, \quad \mathrm{Sp}(G^4) = \frac{1}{4^3}R^4,$$

т. е.

$$p_1 = R,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}R^2 = -\frac{3}{8}R^2,$$

$$p_3 = \frac{1}{3}\frac{1}{16}R^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}R^2 R + \frac{1}{6}R^3 = \frac{1}{16}R^3,$$

$$p_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{16\cdot 4}R^4 - \frac{4}{3}R\frac{1}{16}R^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{1}{16}R^4 + R^2\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{6}R^4\right] = -\frac{1}{4^4}R^4.$$

Полученные выражения для p_i отвечают следующему характеристическому уравнению:

$$G = (G_\alpha^\beta), \quad \left(G - \frac{R}{4}\right)^4 = 0.$$

Отметим, что в случае присутствия именно такого геометрического фона

$$D^\beta \Phi_\beta - \mu\Phi = 0,$$

$$D_\beta \Phi - \lambda\left(F_{\beta\alpha} + i\frac{\hbar c}{e}\frac{R(x)}{4}g_{\beta\alpha}(x)\right)\Phi^\alpha - \mu\Phi_\beta = 0$$

и при отсутствии электромагнитного поля система уравнений примет вид:

$$D^\beta \Phi_\beta = Mc\Phi,$$

$$D_\beta \Phi = \left(Mc + i\lambda\frac{\hbar c}{e}\frac{R(x)}{4}\right)\Phi_\beta. \qquad (2.3)$$

Заключение

Полученная модификация уравнений Прока (2.1), и более простой случай (2.3), существенно отличается от неминимальной системы уравнений Прока для безмассовой частицы, которая в безмассовом случае обеспечивает конформную инвариантность волнового уравнения

$$i\nabla_\alpha \Phi = \frac{mc}{\hbar}\Phi_\alpha,$$

$$i\,\nabla_\alpha \Phi^\alpha = \frac{mc}{\hbar}\left(1 + \sigma\frac{R(x)}{m^2c^2/\hbar^2}\right)\Phi.$$

Конформная инвариантность уравнений Максвелла была установлена Кунингхэмом [5] и Бейтманом [6], безмассового уравнения Дирака – Паули [7]; специально модифицированного уравнения для безмассовой скалярной частицы – Гюрши [8]–[10].

В частности, в случае пространств де Ситтера ($R(x) = R$) уравнение (2.3) примет вид (появляется эффективная добавка со знаком плюс или минус к массе частицы):

$$D^\beta \Phi_\beta = Mc\Phi,$$

$$D_\beta \Phi = \left(Mc + i\lambda\frac{\hbar c}{e}\frac{R}{4}\right)\Phi_\beta.$$

Таким образом, скалярная частица с внутренней структурой Кокса оказывается очень чувствительной к геометрии, в частности, к тензору Риччи пространства-времени. Обобщенное скалярное уравнение типа Клейна – Фока – Гордона для такой частицы оказывается очень сложным, гораздо более простым представляется использование обобщенной системы уравнений первого порядка типа Прока. Примеры решения предложенных уравнений будут рассмотрены в отдельных работах.

Авторы благодарны В.В. Киселю и В.М. Редькову за обсуждение работы и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кисель*, *В.В.* Точные решения уравнения Кокса для частицы со спином 0 во внешних электромагнитных полях / В.В. Кисель // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 2. – С. 82–85.

2. *Редьков*, *В.М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 486 с.

3. *Cox*, *W.* Higher-rank representations for zero-spin field theories / W. Cox // J. Phys. Math. Gen. – 1982. – Vol. 15, № 2. – P. 627–635.

4. *Гантмахер*, *Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

5. *Cunningham*, *E.* The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof / E. Cunningham // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 8. – P. 77–98.

6. *Bateman*, *H.* On the conformal transformations of the space of four dimensional and their applications to geometric optics / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 7. – P. 70–92.

7. *Pauli*, *W.* Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. − 1940. − Bd. 13. − S. 204–208.

8. *Gürsey*, *F.* On a conform invariant spinor wave equation / F. Gürsey // Nuovo Cim. − 1956. − Vol. 3, № 10. − P. 988–1006.

9. *Gürsey*, *F.* On some conform invariant world-lines / F. Gürsey // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. A. − 1956. − Vol. 21. − P. 129–142.

10. *Gürsey*, *F.* Reformulation of general relativity in accordance with Mach's principle / F. Gürsey // Ann. Phys. − 1963. − Vol. 24. − P. 211–244.

Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ (Беларусь – Украина), проект Ф13К-079 (2013–2015 гг.).

Поступила в редакцию 13.06.14.